

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики
А.М. Райгородский**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Прикладная комбинаторная оптимизация
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Анализ данных в экономике Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составил: Б.И. Гольденгорин, д-р техн. наук, профессор, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

Аннотация

В этом курсе будут рассмотрены задачи коммивояжера и маршрутизации транспортных средств (с ограничениями на емкости транспортных средств, временные интервалы, получение и отправление грузов, периодичность расписаний и т. д.), задачи оптимизации расписаний с прерываниями на одной машине с произвольными временами поступления и завершения работ, произвольными длительностями выполнения работ, произвольными прерываниями и приоритетами (весами), а также широким спектром критериев оптимальности, например, минимизация суммарного взвешенного времени выполнения всех работ или минимизация суммарного взвешенного времени запаздывания выполнения всех работ.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение моделей и алгоритмов прикладной комбинаторной оптимизации, а также алгоритмов для задач размещения, транспортировки товаров и маршрутизации транспортных средств, включая анализ чувствительности и устойчивости, применяемый к задачам о минимальном основном дереве (МОД) и ее вариациях, кратчайшем пути, максимальном потоке - минимальном разрезе.

Задачи дисциплины

- Основные понятия вычислительных сложностей для задач и алгоритмов (как точных, так и эвристических), которые необходимы для дальнейшего изучения моделей и алгоритмов управления вычислительных методов, алгоритмов анализа больших данных, машинного обучения, исследования операций, теории игр и комбинаторной оптимизации.
- Навыки проектирования, реализации и анализа математических моделей и алгоритмов для решения прикладных задач комбинаторной оптимизации.
- Индивидуального представления исследовательской деятельности по заранее определенной схеме, включая подготовку соответствующего исследовательского отчета и/или научной статьи.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные алгебраические структуры;
- основы анализа и геометрические методы исследования асимптотического поведения дифференциального уравнения;
- статистические методы обработки информации, в частности.

уметь:

- оперировать с алгебраическими и аналитическими объектами;
- понимать геометрический смысл многомерных алгебраических объектов и математических аналитических структур;
- провести первичную статистическую обработку данных и понимать их вероятностную природу;
- понижать размерность исходных данных без существенной потери информации;
- исследовать (математическими статистическими методами) эмпирические зависимости.

владеть:

- основными понятиями моделирования задач комбинаторной оптимизации, методами и алгоритмами их решения.
- навыками алгебраической, функционально-аналитической и статистической грамотности;
- умением применять свои навыки в рамках существующих программных средств (пакетов аналитических вычислений).

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий**

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Эйлеров и гамильтонов цикл, задача коммивояжера, применение этих понятий	2	2		2
2	Элементы теории сложности, практическое применение в задачах комбинаторной оптимизации	3	3		3
3	Вероятностный анализ алгоритмов и рандомизированные алгоритмы.	4	4		4
4	Совместное использование математических и алгоритмических основ при разработке алгоритмов прикладной комбинаторной оптимизации	2	2		2
5	Алгоритм ветвей и правила ветвления	2	2		2
6	Алгоритмы для решения труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации с гарантированной максимальной погрешностью и псевдополиномиальные алгоритмы.	2	2		2

Итого часов	15	15		15
Подготовка к экзамену	0 час.			
Общая трудоёмкость	45 час., 1 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

1. Эйлеров и гамильтонов цикл, задача коммивояжера, применение этих понятий

31) Эйлеров и гамильтонов цикл. Задача коммивояжера. Эффективный алгоритм решения задачи нахождения

эйлерова цикла и эйлерова пути в графе. Примеры задач, сводимых к ним.

(Иванов, Кристофидес, Пападимитриу-Стайглиц)

2) Задача о безотходной укладке трапеций одинаковой высоты в полосе той же самой высоты. Различные её

варианты (без возможности переворота, с возможностью переворота, с вывертыванием наизнанку).

Неэффективность модели этой задачи с трапециями-вершинами и эффективность модели с вершинами ? углами

наклона трапеций. Как решать в каждом случае? (лекции, эксклюзив)

3) Эффективный алгоритм для решения задачи минимизации отходов при укладке трапеций одинаковой высоты

в полосе той же самой высоты. (Последняя лекция, эксклюзив).

2. Элементы теории сложности, практическое применение в задачах комбинаторной оптимизации

Понятие задач распознавания из классов P и NP. NP-полноты задачи распознавания. Как доказывать NP-полноту (на примерах). Понятие трудно-решаемой задачи комбинаторной оптимизации и эффективного алгоритма для задачи комбинаторной оптимизации.(Гэри-Джонсон, Пападимитриу-Стайглиц). Анализ задач по комбинаторной оптимизации.

3. Вероятностный анализ алгоритмов и рандомизированные алгоритмы.

1) а)-Задача об устойчивом паросочетании и алгоритм Гейла-Шепли для её решения.

б)-Сложность алгоритма Гейла-Шепли в худшем случае. в)-Использование разложения перестановки на циклы

для более быстрой реализации алгоритма Гейла-Шепли.

(Кнут, Устойчивые паросочетания: а-лекции 2, б-4 и в-6)

2) Вероятностный анализ алгоритмов. а)-Анализ среднего количества присваиваний при нахождении

максимального элемента массива. б)-Принцип отложенных решений в вероятностном анализе. Задача

собиранья купонов. Оценка сверху среднего количества операций переприсваивания в алгоритме Гейла-Шепли

при случайных матрицах предпочтений (а-Кнут, Искусство программирования, том 1, б-Кнут, Устойчивые

паросочетания, лекции 2 и 4).

3) а)-Порождение случайных перестановок. Метод Монте-Карло для подсчета многомерных интегралов.

б)-Быстрая сортировка со случайным выбором разделяющего элемента.

в)-Алгоритмы Монте-Карло, Лас-Вегаса и шершвудские алгоритмы, примеры таких алгоритмов. (а - Кнут

Искусство программирования, том 3, б-Кормен, в-Макконел и презентация Андреевой)

4) Более детальный разбор некоторых рандомизированных алгоритмов. а)-Алгоритм Миллера-Рабина для

проверки на простоту и его сложность. Почему он работает?

б)-Рандомизированный алгоритм поиска минимального разреза в мультиграфе.

(а-Кормен, б-Презентация Андреевой, книга Motwani)

4. Совместное использование математических и алгоритмических основ при разработке алгоритмов прикладной комбинаторной оптимизации

1) Совместное использование математических и алгоритмических основ при разработке алгоритмов на примере

решения в натуральных числах уравнения $a/(b+c)+b/(a+c)+c/(b+a)=4$.

(интернет-ссылки во время чтения курса)

2) а)-Понятие ЧУМа, теорема Мирского. б)-Решение задачи о разбиении набора точек на возрастающие

ломанные. (а-Спивак Цепи и антицепи, разбор задачи о людоедах

<https://www.mccme.ru/circles/oim/materials/spivak-04-2.pdf>, википедия. б-Статья Лернер, Волосков

<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/633/1/012066/pdf>

5. Алгоритм ветвей и правила ветвления

3Алгоритм ветвей и границ (АВиГ) для задачи минимизации супермодульной функции и ее приложения к ПЗР. Недвоичные правила ветвления, применяемые к псевдобулевой формулировке ПЗР. Правило ветвления: сделай квадратный член линейным. Задача квадратичного разбиения графа (ЗКРГ) - пример максимизации субмодулярной функции.

6. Алгоритмы для решения труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации с гарантированной максимальной погрешностью и псевдополиномиальные алгоритмы.

1) Алгоритмы для решения труднорешаемых задач с гарантированной максимальной погрешностью.

Относительная, абсолютная погрешность. Алгоритм Кристофидеса для евклидовой задачи коммивояжера.

(Пападимитриу-Стайглиц)

2) Псевдополиномиальные алгоритмы. Алгоритм для решения задачи о рюкзаке с помощью динамического

программирования и его применение к решению задачи о разбиении с ограничением сверху на разбиваемые

числа. Подсчет количества билетов, ?счастливых по-казански?.

(Пападимитриу-Стайглиц, статья для журнала Математическое просвещение)

Программа дисциплины "Комбинаторная оптимизация"; 01.04.02 "Прикладная математика и информатика".

Страница 6 из 10.

3) а)-Алгоритм локального поиска при решении задач комбинаторной оптимизации. б)-Метод отжига.

Применение к задаче коммивояжера (а-Пападимитриу Стайглиц; про отжиг, см. например

<http://vuz.exponenta.ru/PDF/book/bm61.pdf> + статья в википедии)

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Методы оптимизации [Текст]. Ч. 2 : Численные алгоритмы : учеб. пособие для вузов / Жадан, В. Г. ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2015 .— 320 с.

Дополнительная литература

1. Линейная оптимизация (линейное программирование) [Текст] : учебное пособие : М-во высш. и сред. спец. образов. РСФСР / Ю. П. Иванилов .— М. : МФТИ, 1980 .— 82 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://www.amazon.com/Boris-Goldengorin/e/B00AR073TE>

<https://www.ohio.edu/engineering/news/news-story.cfm?newsItem=026543AB-5056-A81E-8D51C1E5295E4C34>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций. Используются электронные учебники.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Для успешного освоения курса требуется:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Кроме того рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: Анализ данных в экономике
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра дискретной математики
курс: 4
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: Б.И. Гольденгорин, д-р техн. наук, профессор, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Прикладная комбинаторная оптимизация» обучающийся должен:

знать:

- основные алгебраические структуры;
- основы анализа и геометрические методы исследования асимптотического поведения дифференциального уравнения;
- статистические методы обработки информации, в частности.

уметь:

- оперировать с алгебраическими и аналитическими объектами;
- понимать геометрический смысл многомерных алгебраических объектов и математических аналитических структур;
- провести первичную статистическую обработку данных и понимать их вероятностную природу;
- понижать размерность исходных данных без существенной потери информации;
- исследовать (математическими статистическими методами) эмпирические зависимости.

владеть:

- основными понятиями моделирования задач комбинаторной оптимизации, методами и алгоритмами их решения.
- навыками алгебраической, функционально-аналитической и статистической грамотности;
- умением применять свои навыки в рамках существующих программных средств (пакетов аналитических вычислений).

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Домашнее задание (исследовательский проект) будет основано на задачах из теории расписаний, выполняемых индивидуально: Домашние задания будут назначаться, начиная с четвертой недели только один раз в неделю. Поздняя сдача заданий будет принята со штрафом. Студенты, использующие чужую работу без ссылок (плагиат), получают неудовлетворительную оценку по курсу. Студенты должны будут выполнить свой исследовательский проект, используя следующие 5 шагов.

1. Постановка задачи, ее математическая модель и иллюстративный численный пример.
2. Обзор публикаций, связанных с вашей задачей, включая анализ математических моделей, алгоритмов, эталонных тестов и вычислительных исследований.
3. Проектирование и иллюстрация вашего алгоритма на численном примере.
4. Реализация вашего алгоритма и анализ вычислительных экспериментов.
5. Письменный научно-исследовательский отчет о результатах вашего исследования и его индивидуальная презентация.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Задачи о минимальном остовном дереве с анализом единственности и устойчивости их оптимальных решений.
2. Прерываемые задачи планирования на одной машине с различными целевыми функциями.
3. Задача коммивояжера ЗК: обзор моделей и алгоритмов ее решения.
4. Допуски: верхние, нижние, и горлышковые в прикладной комбинаторной оптимизации.
5. Алгоритм ветвей и границ для симметричной ЗК (СЗК).
6. Алгоритм ветвей и границ для несимметричной ЗК (НЗК).
7. Алгоритм на основе верхних допусков для НЗК.
8. Алгоритм на основе нижних допусков для НЗК.
9. Корректирующие алгоритмы решения оптимизационных задач с действительными целевыми функциями.
10. Корректирующие алгоритмы решения НЗК и Простейшей Задачи Размещения (ПЗР).
11. Эвристики для решения ЗК: жадная (ближайший сосед на пути), жадная на основе допусков, ближайший сосед для подцикла; 2, 3-окрестностей.
12. Введение в субмодулярные функции: локальные, глобальные максимумы на диаграмме Хассе и их связанные компоненты.
13. Супермодулярность целевой функции в ПЗР и алгоритм ветвей без границ.
14. Теорема Черенина-Хачатурова. Правила отбраковки и правила сохранения. Алгоритм дихотомии (предварительного сохранения).
15. Алгоритм ветвей и границ (АВиГ) для задачи минимизации супермодулярной функции и ее приложения к ПЗР.
16. Недвоичные правила ветвления, применяемые к псевдобоулевой формулировке ПЗР. Правило ветвления: сделай квадратный член линейным.
17. Задача квадратичного разбиения графа (ЗКРГ).
18. Теорема Черенина (квазивогнутость субмодулярных функций).
19. Жадный алгоритм для функций субмодулярного множества.
20. Псевдобоулевы полиномы, применяемые к Простому расположению завода (SPLP).
21. Точные и эвристические алгоритмы для ПЗР.
22. Теорема усечения псевдо – булевского полинома для задачи о p -медиане задачи и ее применения для построения алгоритмов.
23. Агрегирование 2-мерных (обычных) матриц. Теорема Дилворса.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.